21/3/16

$f: V \to V$ γραμμική απεικόνιση

f διαγωνίσιμη $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} \exists$ βάση $\alpha = \{\vec{\alpha_1} \dots \vec{\alpha_n}\}$ του V τέτοια ώστε:

$[f]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \overset{\text{θεώρημα}}{\Longleftrightarrow}$ υπάρχει βάση α του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα

$A \in K^{n\times n}$

A διαγωνίσιμος $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

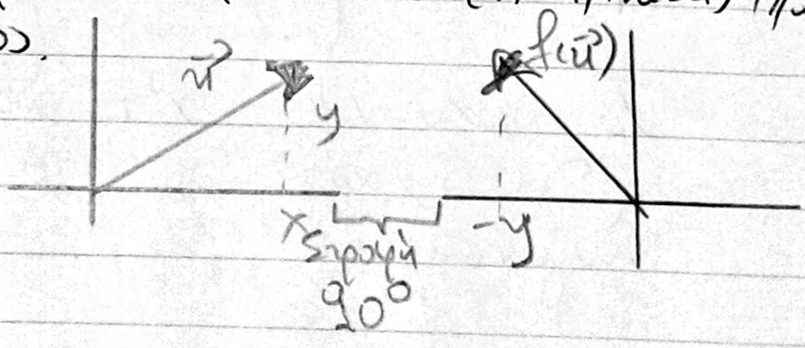
$L_A : K^{n\times n} \to K^{n\times 1}$ διαγωνίσιμη

$A \in K^{n\times n}$ διαγωνίσιμος $\overset{\text{θεώρημα}}{\Longleftrightarrow}$ υπάρχει βάση $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ του $K^{n\times 1}$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A.

Παράδειγμα γραμμικής απεικόνισης (ή πίνακα) που δεν είναι διαγωνίσιμος.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (-y, x)$



Δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Μεθοδολογία

Ιδιοτιμές ή Ιδιοδιανύσματα

1. $[f]_\alpha^\alpha = A$
2. $X_f(x) = \det(A - xI)$
3. Βρίσκω τις ρίζες του $X_f(x)$, ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$
4. $V_f(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)$ ή $\{x \in K / (A - \lambda_i I) \cdot x = 0\}$
5. Διαγωνίσιμη:

Ναι αν μπορούμε να βρούμε μια βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα.

Διαφορετικά **όχι**.

$$[f]_\mathcal{E}^\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$$

$f(1,0)=(0,1)$ $f(0,1)=(-1,0)$

$$X_f(x) = \det\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2+1$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, άρα δεν έχει ιδιοτιμές και δεν είναι διαγωνίσιμη.

Από $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$?!

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ δεν είναι διαγωνίσιμος.

$$X_A(x) = \det(A - x \cdot I_{3\times 3}) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3$$

ρίζα το 0 (τριπλή)

$$V_A(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^{3\times1} \Big/ (A-0I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in R^{3\times1} \Big/ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \to$ κλιμακωτός άρα $\begin{matrix}y=0\\z=0\\x=t\end{matrix}$

Συνεπώς $V_A(0)=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix} \Big/ t\in R\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

Δεν μπορούμε να βρούμε βάση που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα. A δεν είναι διαγωνίσιμος.

Θεώρημα: Έστω V είναι K.δ.χ. και $f: V\to V$ γραμμική απεικόνιση με $\lambda_1,\lambda_2 \dots \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f. Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων, δηλαδή $X_f(x)=(-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\dots(x-\lambda_k)^{n_k}$ και για κάθε $1\le i\le k$ ισχύει $\dim V(\lambda_i)=n_i$

n_i αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i

$\dim V_f(\lambda_i)$ γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

A διαγωνίσιμος ⇔ $\chi_A(x)=(-1)^n(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$
και γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική πολλαπλότητα
Δηλαδή $\dim V_A(\lambda_i)=n_i \quad 1\le i\le k$
Ισχύει πάντα $n=n_1+n_2+\dots+n_k \quad 1\le \dim V_A(\lambda_i)$

$1\le \dim V_A(\lambda_i)\le n_i$

$\dim V_A(\lambda_i)<n_i$ μη διαγωνίσιμος

Άσκηση: Είναι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$ διαγωνίσιμος;

$$\chi_A(x)=\det(A-x\cdot I_{3\times3})=\det\begin{pmatrix}2-x&1&0\\0&1-x&-1\\0&2&4-x\end{pmatrix}=$$

$$=(2-x)\begin{vmatrix}1-x&-1\\0&4-x\end{vmatrix}+0\dots+0\dots=$$

$$=(2-x)(4+x^2-5x)=(x-2)(x^2-5x+6)=-(x-2)(x-2)(x-3)$$

$$\chi_A(x)=-(x-2)^2(x-3)$$

Ιδιοτιμές 2 (με αλγεβρική πολλαπλότητα)
3 (με αλγεβρική πολλαπλότητα)

$$V_A(2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, (A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1} \,\middle|\, \begin{pmatrix}2-2&1&0\\0&1-2&-1\\0&2&4-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&-1&-1&0\\0&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$y=0$
$z=0$
$x=t$

$$\left\{\begin{pmatrix} t\\0\\0\end{pmatrix} t\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Γεωμετρική πολλαπλότητα του 2 ≠ αλγεβρική πολ/τα του 2
$\parallel$
$\dim V_A(2)=1$

$\alpha_0=0,\ \alpha_1=1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=2,\ \alpha_4=3,\ \alpha_5=5,\ \alpha_6=8,\ \alpha_7=13,$
$\alpha_8=21$

$a_n = a_{n-1}+\alpha_{n-2}$

$$\begin{pmatrix} a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{n-1}\\ \alpha_{n-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1}+\alpha_{n-2}\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{n-2}\\ \alpha_{n-2}\end{pmatrix}$$

$$= A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2}\\ a_{n-2}\end{pmatrix} = \underbrace{A\cdot A\cdot A}_{A^3}\begin{pmatrix} a_{n-3}\\ a_{n-4}\end{pmatrix} = A^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix}1-x & 1\\ 1 & -x\end{vmatrix} = x^2-x-1$$

⇒ Ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του x^2-x-1

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

Έστω $\varphi = \frac{1+\sqrt5}{2}$ και $\psi = \frac{1-\sqrt5}{2}$

$$V(\varphi)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix}1-\varphi & 1\\ 1 & 0-\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1-\varphi & 1 & 0\\ 1 & -\varphi & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -\varphi & 0\\ 1-\varphi & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to r_2-(1-\varphi)r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1-\varphi & 0 & 0\\ 0 & \varphi^2-\varphi-1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & \varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$x-\varphi y=0 \qquad x=\varphi t$

$y=t \qquad y=t$

άρα $V(\varphi)=\left\{\begin{pmatrix}\varphi t\\ t\end{pmatrix} / t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}\varphi\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V(\psi)=\left\langle\begin{pmatrix}\psi\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$$[L_A]_\varepsilon^\varepsilon=[I]_\alpha^\varepsilon\,[L_A]_\alpha^\alpha\,[I]_\varepsilon^\alpha$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi & \\ & \psi\end{pmatrix}\frac{1}{\varphi-\psi}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\psi\\ -1 & \varphi\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{1}{\varphi-\psi}\begin{pmatrix}\varphi & \psi\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\psi\\ -1 & \varphi\end{pmatrix}$$

$$A^{n-1}=\frac{1}{\varphi-\psi}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} & \\ 0 & \psi^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\psi\\ -1 & \varphi\end{pmatrix}$$

$$x_n=\frac{1}{\varphi-\psi}(\varphi^n-\psi^n)=\frac{1}{\sqrt5}(\varphi^n-\psi^n)=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$$